Optimale konstruktioner - når naturen former

Opgaver

Optimale konstruktioner - når naturen former

Indledning | Solen | Optimering | Bobler | Spilteori
Hovedmenu | Opgaver | Download | Links | Kolofon
1 2 3 4 5 6

Opgave 1

Opgaven knytter sig til artiklen om solsikker

Vi ser i det følgende kun på brøker med positive hele tal i tæller og nævner.

a. Vis at

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \text{ hvis } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

b. To brøker $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ kaldes naboer, hvis $|ad - bc| = 1$.

Vis at $\frac{a+c}{b+d}$ er nabo til både $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$, hvis $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ er naboer.

c. Vis at en brøk i intervallet mellem to naboer $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ vil have en nævner, der er større eller lig med både *b* og *d*.

d. Gør rede for, at $\frac{a+c}{b+d}$ er den brøk med mindst mulig nævner, der ligger i intervallet mellem to naboer $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$.

e. Vis for eksempel ved induktion, at to på hinanden følgende brøker i rækken
$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{2}{5}\quad\frac{3}{8}\quad\frac{5}{13}\quad\ldots$ (1)
er naboer.

f. Betragt Fibonaccifølgen *f(n)*, hvor *f(1)* = *f(2)* = *1* og f(*n*+*1)* = *f(n)* - *f(n-1)* for alle naturlige tal *n* større end 1. Altså følgen 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 ,…

Antag at brøkerne $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ har grænseværdien Φ, når *n* går mod uendelig.

Gør rede for, at Φ Φ må være løsning til ligningen $x^2 - x - 1 = 0$, og beregn den løsning, der er større end 1.

g. Vis at rækken (1) må gå mod $\frac{1}{\Phi^2}$, når n går mod uendelig (med samme forudsætninger som i opgave f)

h. Forklar hvorfor spiralerne med for eksempel antallet 21 drejer modsat dem med antallet 34.

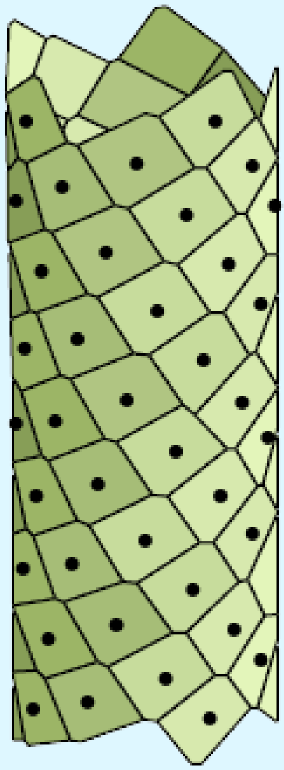
Til sidens top

Optimale konstruktioner - når naturen former

Indledning | Solen | Optimering | Bobler | Spilteori
Hovedmenu | Opgaver | Download | Links | Kolofon
1 2 3 4 5 6

Opgave 2

Opgaven knytter sig til artiklen om solsikker



Ananassens frugt er dækket af frøbærende skæl, der sidder i spiraler. Antallet af spiraler, der drejer den ene vej, er oftest 8, mens antallet, der drejer den anden vej, er 13. Vi vil se på en dynamisk model for, hvordan disse skæl dannes og vokser; en model, som forklarer, hvorfor det netop er tallene 8 og 13, der fremkommer.

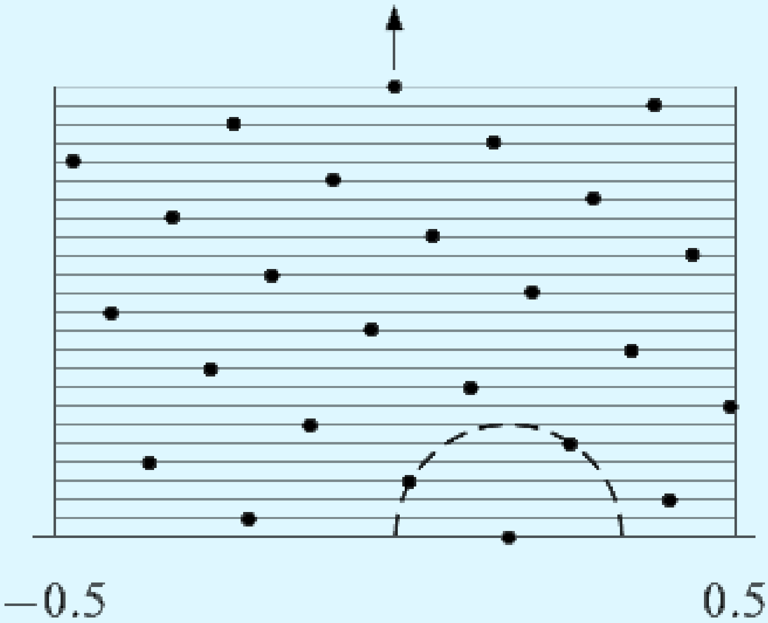
Overfladen opfattes som en cylinder, og centrum for et skæl svarer til et punkt på denne overflade. Den cirkel, der udgør cylinderens bund kaldes grundcirklen.

En følge af punkter P_0, P_1, P_2, ... dannes og bevæger sig efter følgende regler:

1. Ethvert af punkterne dannes på grundcirklen og bevæger sig derefter lodret med konstant fart.
2. Afstanden mellem de to steder, hvor to på hinanden følgende punkter dannes, er konstant.
3. Afstanden i tid mellem de to tidspunkter, hvor to på hinanden følgende punkter dannes, er konstant.
4. Hvert nyt punkt dannes på det sted på grundcirklen, hvor der er mest plads.

Det er ikke umiddelbart klart, at alle regler kan blive opfyldt samtidigt, men det vil vi antage i det følgende.

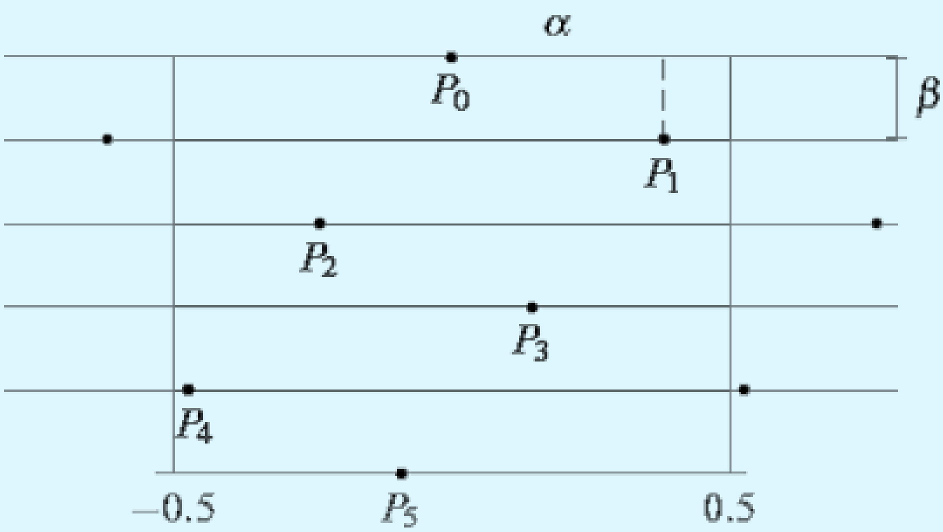
Man kan præcisere reglerne ved at folde cylinderens overflade ud som et rektangel, og lægge et koordinatsystem således at de to nederste hjørner i rektanglet får koordinaterne (-0,5 , 0) og (0,5 , 0).



At et nyt punkt dannes på det sted på grundcirklen, hvor der er mest plads, betyder, at punktet dannes, hvor der er størst mulig afstand til det nærmeste af de foregående punkter. Bemærk, at man for at vurdere afstanden mellem to punkter, der ligger tæt på hinanden men på hver sin side af den linie, der skærer cylinderen op, kan se på tre kopier af den udfoldede cylinder lagt i forlængelse af hinanden. På denne måde kan man også sige, at centrum for den største halvcirkel, der kan lægges uden at have nogen af de forgående punkter i sit indre, er det sted, hvor der er mest plads.

Hvis P_0 ligger på randen af den cirkel, der på denne måde kan laves ved dannelsen af P_n, siger man, at P_0 har indflydelse på P_n.

a) Forskellen mellem *x*- og *y*-koordinaten til P_0 og P_1 kaldes henholdsvis α og β. Når β er tilstrækkelig stor vil kun have indflydelse på P_1, og α vil være 0,5. Efterhånden som β bliver mindre vil P_0 få indflydelse på flere af de efterfølgende.



Antag at $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$. Koordinatsystemet lægges så ligger på x - aksen, og har førstekoordinaten 0. Da er

$$P_0 = (0\,,5\beta) \quad P_3 = (3\alpha - 1,\, 2\beta) \quad P_5 = (5\alpha - 2,\, 0)$$

Vi vil se på en situation, hvor P_0 har indflydelse på P_5; da gælder specielt:

$$\left|P_0P_5\right| \leq \left|P_0P_3\right| \quad (2)$$

a. Vis ved hjælp af (2) at (α , β) opfattet som et punkt ligger på en cirkel med centrum (13/21, 0) og radius 1/21; og dermed specielt at

$$\frac{12}{21} \leq \alpha \leq \frac{14}{21}$$

b. Overvej, hvordan denne situation kan generaliseres, og formuler den sammenhæng mellem tallene i Fibonacci-følgen, der gør, at man ovenfor kommer fra tallene 3 og 5 til 21.

Litteratur og URL'er:

- Asmus Schmidt: Kædebrøker. Gyldendal 1967.
- **http://www.solsequi.dk**
- **http://goldennumber.net/index.html**
- **http://www.math.smith.edu/phyllo/**

Til sidens top

Optimale konstruktioner - når naturen former

Indledning | Solen | Optimering | Bobler | Spilteori

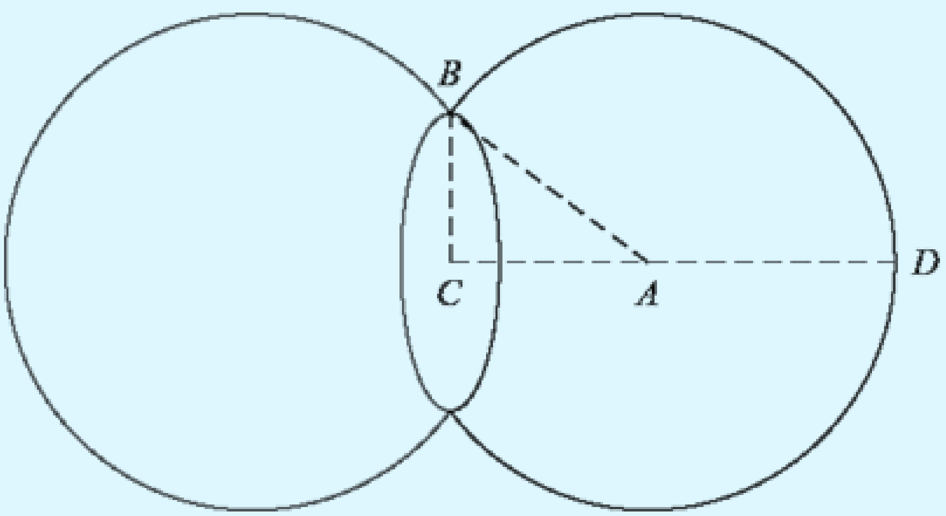
Hovedmenu | Opgaver | Download | Links | Kolofon

1 2 3 4 5 6

Opgave 3

Opgaven knytter sit til artiklen om bobler

Vi vil se på en dobbeltboble med samme rumfang i de to kamre; væggen mellem kamrene er så en cirkelskive.



Med betegnelser som på figuren sættes $O = 2\pi rh$ og $V = \frac{1}{3}\pi(3rh^2 - h^3)$.

For en afskåret kugle med radius *r* og højde *h* gælder følgende formler for rumfanget *V* og den krumme overflade *O*:

$$O = 2\pi rh \text{ og } V = \frac{1}{3}\pi(3rh^2 - h^3)$$

Vi vil nu holde rumfanget i de to kamre fast, men minimere den samlede overflade i dobbeltboblen ved at ændre på *r* og *h*.

Den samlede overflade, der består af de to krumme overflader og cirkelskivens areal, vil være en funktion af *h*, som betegnes *f(h)*.

a. Opstil en forskrift for *f*.

b. Find ved differentiation et udtryk for sammenhængen mellem *h* og *V*, når *f(h)* er mindst mulig.

c. Vis at *h* =1,5 · *r*, når *f(h)* er mindst mulig.

d. Vis at den stumpe vinkel mellem tangentplanerne i *B* til de to kugler er 120 grader, når den samlede overflade er mindst mulig.

e. Vis den ovennævnte formel for rumfang af afskåret kugle ved at beregne rumfanget af et omdrejningslegeme ved integralregning (se eventuelt opgave 5.119 i Vejledende eksempler på eksamensopgaver i matematik, 3-årigt forløb til A-niveau).
Den ovennævnte formel for den krumme overflade af afskåret kugle kan udledes ved at benytte følgende formel for overfladen af et omdrejningslegeme:

$$O = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

f. Begrund denne formel og brug den til at udlede formlen for den krumme overflade af afskåret kugle.

Til sidens top

Optimale konstruktioner - når naturen former

Indledning | Solen | Optimering | Bobler | Spilteori

Hovedmenu | Opgaver | Download | Links | Kolofon

1 2 3 4 5 6

Opgave 4

Opgaven knytter sit til artiklen om bobler

a. Find $f''(0)$ (og dermed krumningen i 0 for en parabel) når

$$f(x) = a \cdot x^2$$

b. Opstil forskriften for den funktion, hvis graf er den nedre halvdel af en cirkel med centrum (0 , *r*) og radius *r*, og beregn $f''(0)$.

c. Vis at cirklen med radius 0,5 og centrum (0 , 0,5) er den størst mulige cirkel med centrum på *y*-aksens positive del, der har netop ét punkt fælles med parablen med ligningen $y = x^2$.

Litteratur og URL'er:

- C.V. Boys, Sæbebobler og de kræfter, der danner dem. Gyldendals kvantebøger (1962).
- F. Morgan, Proof of the Double Bubble Conjecture, Amer. Math. Monthly, March (2001) 193–205.
- NASA Microgravity Experiments: **http://spaceflight.nasa.gov/station/crew/exp6/spacechronicles.html**
- Normalsnittets krumning: **http://217.60.167.201/gc/nsnit.pdf**
  Denne indeholder blandt andet bevis for, at middelkrumningen ikke afhænger af, hvordan de ortogonale snit lægges.

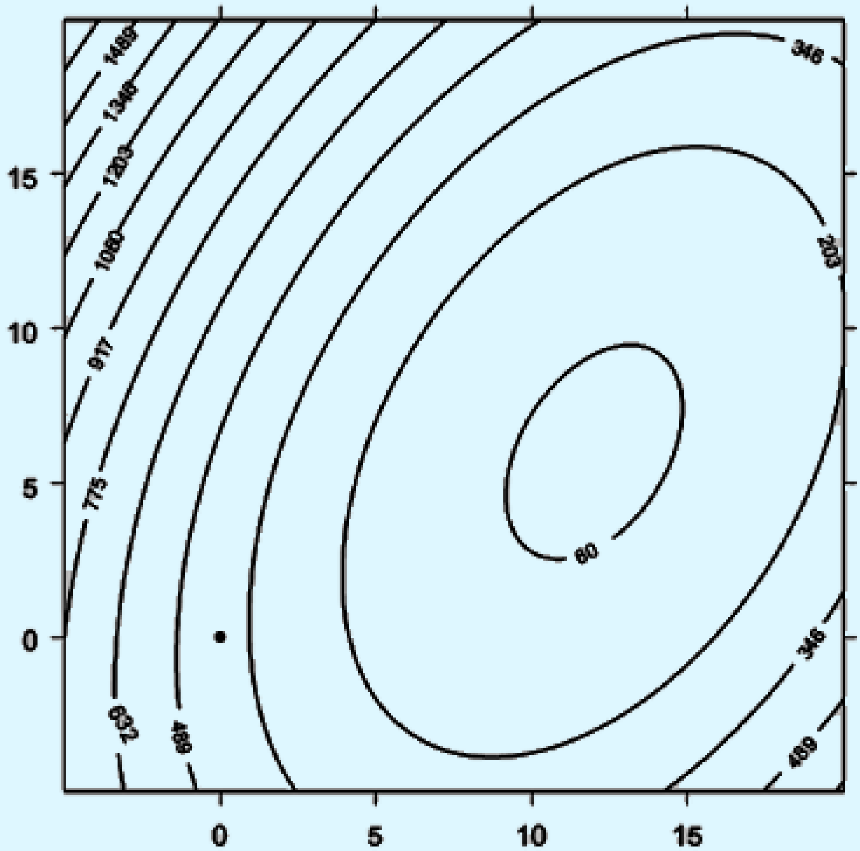
Opgave 5

Opgaven knytter sig til artiklen om topologioptimering

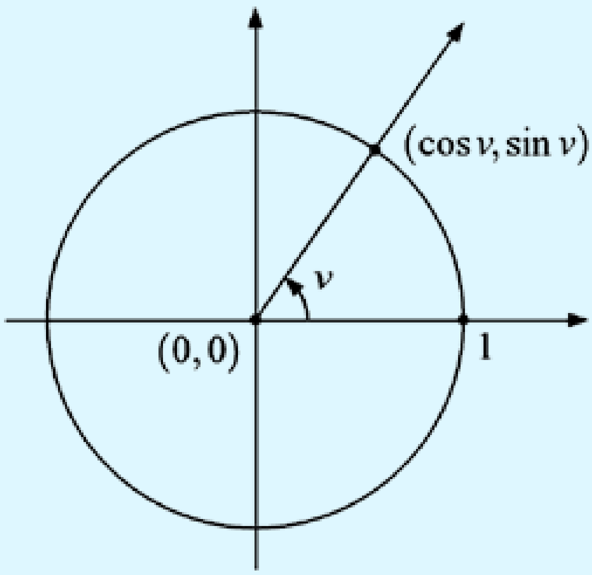
I topologioptimering ser man på funktioner af mange variable, men i denne opgave nøjes vi med at se på en funktion i to variable:

$$f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 2y^2 - 60x + 400$$

Afsat i et 3-dimensionalt koordinatsystem vil punkterne af formen $(x, y, f(x,y))$ udgøre en flade. Vi begrænser os til *x* - og *y* -værdier mellem 0 og 20 og kan sammenligne fladen med et bjerglandskab. På figuren er vist nogle niveaukurver for fladen.



Vi forestiller os, at vi står på ski i dette landskab og befinder os i (0,0). Vi vil gerne nedad til det laveste punkt så hurtigt som muligt, men kan kun se en meter i hver retning. Man kan undersøge, i hvilken retning det går mest nedad ved at se på, hvordan højden varierer over punkter, der ligger på en cirkel med centrum i (0,0) og radius 1. Punktets position afhænger af vinklen *v*, som vist på figuren:



Man kan altså undersøge funktionen $g(v) = f(\cos v, \sin v)$.

a) Tegn grafen for *g* på lommeregneren og find den vinkel, der giver den laveste højde. Sammenlign med niveaukurverne.

b) Overvej, hvordan man på tilsvarende måde trinvist kan komme til bunden. Hvordan bliver ruten i store træk?

Hvis man har differentialregning til rådighed kan minimumspunktet bestemmes direkte ved at finde ud af, hvor tangentplanen er vandret. Hertil skal man bruge *de partielle afledede* i et vilkårligt fast punkt (x_0, y_0) : den partielle afledede f_x' med hensyn til *x* fås ved at differentiere med *x* som variabel og *y* som konstant. Hvis tangentplanen i kaldes α, og planen med ligningen $y = y_0$ kaldes β vil $f_x'(x_0, y_0)$ være lig med hældningen af skæringen mellem α og β. Tilsvarende med f_y'.

c) Bestem koordinaterne til minimumspunktet for *f* ved at løse ligningssystemet

$$f_x'(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f_y'(x,y) = 0$$

Litteratur og URL'er:

- N. Olhoff: *Design af optimale konstruktioner*. Naturens Verden, 32, 1998.
- O. Sigmund: *Design af ekstreme materialer og mikrorobotter - Anvendelser af Topologioptimering*. Naturens Verden, 32, 1998.
- På **www.topopt.dtu.dk** forklares de matematiske metoder i topologioptimeringen og der ligger et program, hvor man kan få løst små optimeringsproblemer, som man selv stiller.

Til sidens top

Optimale konstruktioner - når naturen former

Indledning | Solen | Optimering | Bobler | Spilteori

Hovedmenu | Opgaver | Download | Links | Kolofon

1 2 3 4 5 6

Opgave 6

Opgaven knytter sig til artiklen om spilteori

Vi ser på et straffespark i fodbold og laver følgende model:

Spilleren kan vælge én af to muligheder:

S: at skyde ude i en af siderne i målet

M: at skyde midt i målet

Målmanden kan vælge én af to muligheder:

S: at kaste sig til en af siderne i målet

M: at blive stående midt i målet

Sandsynligheden for, at spilleren scorer, afhænger af hvilke af ovenstående muligheder, der vælges og er angivet i tabellen nedenfor:

Spiller	Målmand	Sandsynlighed
S	*S*	*0,75*
S	*M*	*1*
M	*S*	*1*
M	*M*	0

Hvis for eksempel spilleren skyder midt i målet og målmanden bliver stående, klarer målmanden altså skuddet.

Vi forestiller os nu, at både spiller og målmand inden sparket hver for sig trækker lod om, hvad de vil gøre. De har hver en kasse med 100 lodder, hvor der enten står S eller M. Vi sætter

p = sandsynligheden for, at spilleren trækker et *S*

q = sandsynligheden for, at målmanden trækker et *S*

Inden de trækker, vælger de to aktører strategi, hvilket vil sige, at spilleren bestemmer størrelsen af p, og målmanden bestemmer størrelsen af q.

De vælger altså, hvor mange lodder af type *S* og *M*, der skal ligge i deres kasse.

Sandsynligheden for en scoring, der afhænger af p og q, kaldes $S(p,q)$.

For at finde en formel for $S(p,q)$ må vi kende for eksempel sandsynligheden for, at spilleren trækker *S*, samtidig med at målmanden trækker *S*.

a. Gør rede for, at der gælder

Spiller	Målmand	Sandsynlighed
S	*S*	$p \cdot q$
S	*M*	$p \cdot (1 - q)$
M	*S*	$q \cdot (1 - p)$
M	*M*	$(1 - p) \cdot (1 - q)$

b. Vis at $S(p,q) = p + q - 1{,}25 \cdot p \cdot q$

Vi forestiller os nu, at målmanden kender spillerens strategi, altså at målmanden kender p , i det øjeblik han skal vælge q.

c. Find det bedst mulige valg af q , når p er henholdsvis 1 og 0,6.
d. Beregn den værdi af p, for hvilken alle q er lige gode.

Vi forestiller os nu, at spilleren også kender målmandens strategi, altså at spilleren kender q , i det øjeblik han skal vælge p.

e. Angiv en Nash-ligevægt for dette spil, det vil sige, find et par (p_0, q_0) , således at q_0 er det bedste valg for målmanden givet p_0 , og p_0 er det bedste valg for spilleren givet p_0 .

Til sidens top

Optimale konstruktioner - når naturen former

Indledning | Solen | Optimering | Bobler | Spilteori

Hovedmenu | Opgaver | Download | Links | Kolofon

1 2 3 4 5 6

Opgave 4

Opgaven knytter sit til artiklen om bobler

a. Find $f''(0)$ (og dermed krumningen i 0 for en parabel) når

$$f(x) = a \cdot x^2$$

b. Opstil forskriften for den funktion, hvis graf er den nedre halvdel af en cirkel med centrum (0 , *r*) og radius *r*, og beregn $f''(0)$.

c. Vis at cirklen med radius 0,5 og centrum (0 , 0,5) er den størst mulige cirkel med centrum på *y*-aksens positive del, der har netop ét punkt fælles med parablen med ligningen $y = x^2$.

Litteratur og URL'er:

- C.V. Boys, Sæbebobler og de kræfter, der danner dem. Gyldendals kvantebøger (1962).
- F. Morgan, Proof of the Double Bubble Conjecture, Amer. Math. Monthly, March (2001) 193–205.
- NASA Microgravity Experiments: **http://spaceflight.nasa.gov/station/crew/exp6/spacechronicles.html**
- Normalsnittets krumning: **http://217.60.167.201/gc/nsnit.pdf**
  Denne indeholder blandt andet bevis for, at middelkrumningen ikke afhænger af, hvordan de ortogonale snit lægges.

Optimale konstruktioner - når naturen former

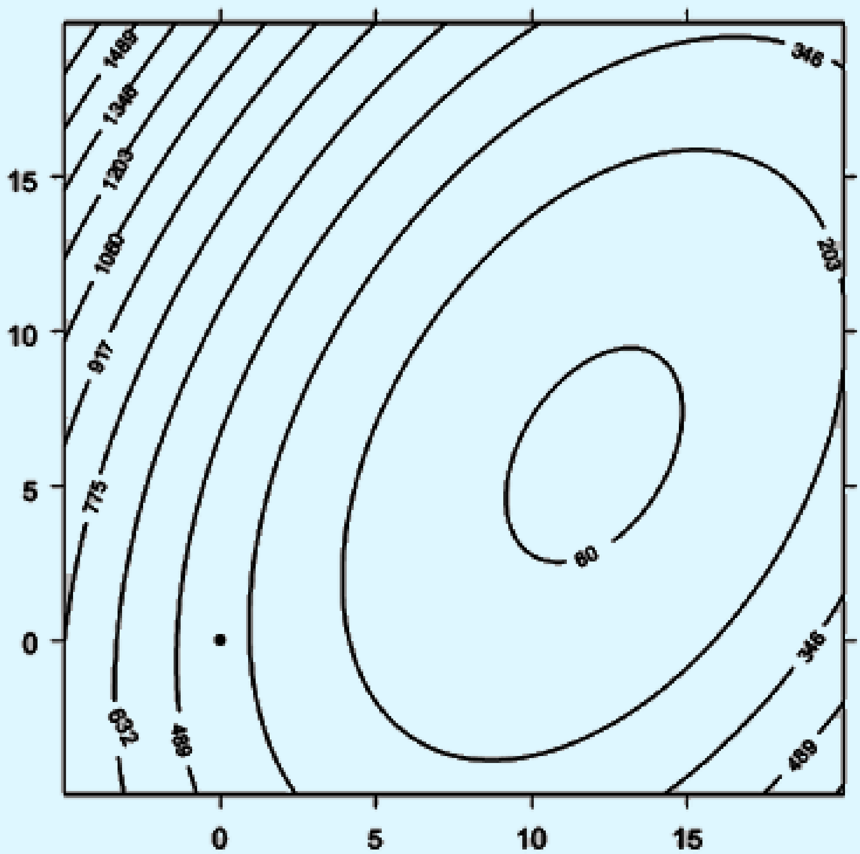
Opgave 5

Opgaven knytter sig til artiklen om topologioptimering

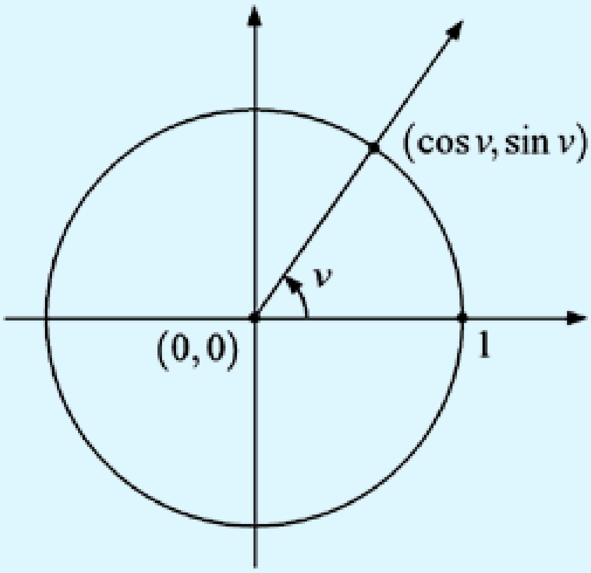
I topologioptimering ser man på funktioner af mange variable, men i denne opgave nøjes vi med at se på en funktion i to variable:

$$f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 2y^2 - 60x + 400$$

Afsat i et 3-dimensionalt koordinatsystem vil punkterne af formen $(x, y, f(x,y))$ udgøre en flade. Vi begrænser os til *x* - og *y* -værdier mellem 0 og 20 og kan sammenligne fladen med et bjerglandskab. På figuren er vist nogle niveaukurver for fladen.



Vi forestiller os, at vi står på ski i dette landskab og befinder os i (0,0). Vi vil gerne nedad til det laveste punkt så hurtigt som muligt, men kan kun se en meter i hver retning. Man kan undersøge, i hvilken retning det går mest nedad ved at se på, hvordan højden varierer over punkter, der ligger på en cirkel med centrum i (0,0) og radius 1. Punktets position afhænger af vinklen *v*, som vist på figuren:



Man kan altså undersøge funktionen $g(v) = f(\cos v, \sin v)$.

a) Tegn grafen for *g* på lommeregneren og find den vinkel, der giver den laveste højde. Sammenlign med niveaukurverne.

b) Overvej, hvordan man på tilsvarende måde trinvist kan komme til bunden. Hvordan bliver ruten i store træk?

Hvis man har differentialregning til rådighed kan minimumspunktet bestemmes direkte ved at finde ud af, hvor tangentplanen er vandret. Hertil skal man bruge *de partielle afledede* i et vilkårligt fast punkt (x_0, y_0) : den partielle afledede $f_x\,'$ med hensyn til *x* fås ved at differentiere med *x* som variabel og *y* som konstant. Hvis tangentplanen i kaldes α, og planen med ligningen $y = y_0$ kaldes β vil $f_x\,'(x_0, y_0)$ være lig med hældningen af skæringen mellem α og β. Tilsvarende med $f_y\,'$.

c) Bestem koordinaterne til minimumspunktet for *f* ved at løse ligningssystemet

$$f_x\,'(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f_y\,'(x, y) = 0$$

Litteratur og URL'er:

- N. Olhoff: *Design af optimale konstruktioner*. Naturens Verden, 32, 1998.
- O. Sigmund: *Design af ekstreme materialer og mikrorobotter - Anvendelser af Topologioptimering*. Naturens Verden, 32, 1998.
- På **www.topopt.dtu.dk** forklares de matematiske metoder i topologioptimeringen og der ligger et program, hvor man kan få løst små optimeringsproblemer, som man selv stiller.

Til sidens top