2. ÅRGANG
NR. 3 / 2003

KEMI MATEMATIK FYSIK i PERSPEKTIV

OPTIMALE KONSTRUKTIONER

- når naturen former

Mange natur- og menneskeskabte konstruktioner har optimale egenskaber, eller er resultat af forsøg på at opnå optimale egenskaber: rosens blade er arrangeret, så bladene får mest muligt lys; sæbebobler har minimal overflade; flybjælker skal være så lette som muligt.
Et optimeringsproblem er tit så kompliceret, at det er umuligt at regne sig frem til en løsning, men når man først har set eller indset løsningen, er det ofte muligt at gennemskue dens matematiske egenskaber.

EN PLADS I SOLEN

- BRUGER NATUREN MATEMATIK ?

Hvorfor danner solsikkens frø et mønster med 34 kurver med uret og 21 kurver mod uret?

Når man ser på en solsikkes blomsterstand, fanges øjet af nogle spiraler, der både drejer venstre og højre om.

Hvorfor vokser frøene langs disse spiraler? Hvorfor er antallet af spiraler i forskellige solsikker netop 13, 21, 34 eller 55 ? Hvor kommer disse tal fra?

Hvad der følger her, er blot antydningen af en forklaring. Den levende natur er ikke en matematisk opgave med et entydigt facit. Vi skal blot skitsere en matematisk model af væksten i en solsikkes blomsterstand. Inden for denne model kan vi komme nærmere på nogle svar på ovenstående spørgsmål.

En primitiv vækstmodel

En meget grov model af væksten i en solsikkes blomsterstand er følgende. Vi forestiller os, at frøene dannes ét ad gangen ud fra et centrum øverst i stilken og, når de første er dannet, flytter langsomt væk fra centrum langs en ret linje. Mellem retningerne for to på hinanden følgende frø er der en bestemt vinkel, som vi vil kalde drejningsvinklen. Se figur 1.

Talværdien α af drejningsvinklen er, som vi skal se, helt bestemmende for det mønster, frøene danner. Lad os her måle drejningsvinklen α som brøkdele af en hel cirkel, så svarer fx 90° til α= 1/4. Bemærk, at vi kun behøver at betragte α mellem 0 og 1/2, da vi vil få samme mønster for α som for 1 - α. Hvis drejningsvinklen fx er 1/7, vil der fremkomme 7 stråler ud fra centrum. Se figur 2.

Det ligner noget, der kunne blive til en rund blomsterstand. Der er dog det problem, at de 7 stråler kommer længere og længere fra hinanden, jo større blomsterstanden bliver, så der opstår områder, hvor der er langt mellem frøene. Og helt inde i centrum er der det problem, at når et frø er dannet, skal det næste frø dannes umiddelbart ved siden af.

Drejningsvinkel og spiraler

En måde at undgå dette sidste problem ville være at have en drejningsvinkel som et rationalt tal af formen p/q, hvor p og q er naturlige tal. Så får vi q stråler, men hver gang et frø er afsat, springer vi p stråler frem, før det næste afsættes. Ved at vælge p ca. halvt så stor som q, vil vi anbringe det næste frø så langt rundt om blomsterstanden som muligt.

Men se nu det mærkelige, der sker, hvis vi vælger drejningsvinklen til et tal som fx 11/23, se figur 3.

Der dannes 23 stråler, men nær centrum ser øjet slet ikke disse stråler, men derimod to spiraler! Det skyldes, at afstanden mellem frøene langs disse to spiraler er mindre end afstanden mellem frøene i de enkelte stråler. Og når frøene ligger tættere langs en kurve (her en spiral), end de gør langs stråler, fornemmer øjet kurven snarere end det større mønster. At vi nær centrum ser netop to spiraler skyldes, at drejningsvinklen 11/23 er tæt på at være 1/2.

Solsikken har udviklet en drejningsvinkel på

$$\alpha = (3 - \sqrt{5})/2$$

som kaldes den gyldne vinkel, og som med tre decimalers nøjagtighed er lig med 0,382, hvilket svarer til 137,5°. I en vis afstand fra centrum vil man kunne se 13 spiraler, fordi 5/13 er en god rational approximation med lille nævner til 0,382, hvilket betyder, at 13 på hinanden følgende frø i alt vil have beskrevet en drejning tæt på 5 omgange. Et nyt frø vil således blive afsat tæt på det frø, der blev afsat 13 frø tidligere.

Men hvorfor har solsikken udviklet en drejningsvinkel på 0,382? Vi har set, at rationale drejningsvinkler med lille nævner vil give dårlige pakninger af blomsterstanden. Før eller siden vil strålerne skilles ad, med dårlig udnyttelse af pladsen til følge.

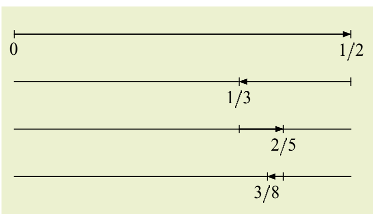
Model af rose, hvor bladene er arrangeret på samme måde som solsikkens kerner. Hvert nyt blad er drejet 137,5° i forhold til det foregående.

Simple brøker

Vi kalder en brøk simplere end en anden, hvis nævneren er mindre. Ved valg af optimal drejningsvinkel skal man altså søge at undgå de simpleste brøker mest muligt. Man kan bruge dette princip til at konstruere en følge af brøker mellem 0 og 1/2, der nærmer sig den optimale drejningsvinkel.

Vi starter med den simpleste brøk 0/1, og vælger derefter den simpleste, der ligger længst muligt væk, nemlig 1/2. Den simpleste brøk mellem 0 og 1/2 er 1/3, og den simpleste brøk mellem 1/2 og 1/3 er 2/5. Således fortsættes og man får

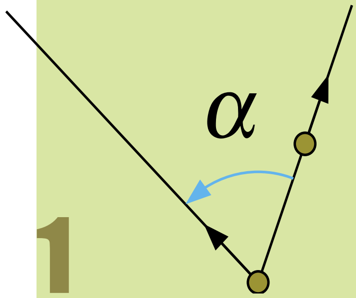
$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{2}{5}\quad\frac{3}{8}\quad\frac{5}{13}\quad\frac{8}{21}\quad\frac{13}{34}\quad\frac{21}{55}$$



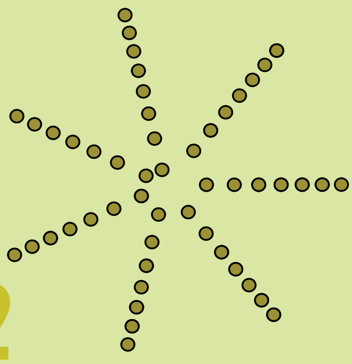
Hver ny brøk er den simpleste mellem de to foregående, og man kan vise, at den fås ved at addere henholdsvis tæller og nævner for de to foregående. Vi bemærker, at tællere og nævnere er følger af de såkaldte Fibonacci tal, hvor hvert tal er summen af de to foregående. Hvis rækken af brøker fortsættes, går brøkerne mod $(3-\sqrt{5})/2$. Pakningen ser nu ud som på figur 4.

Den gyldne vinkel og evolution

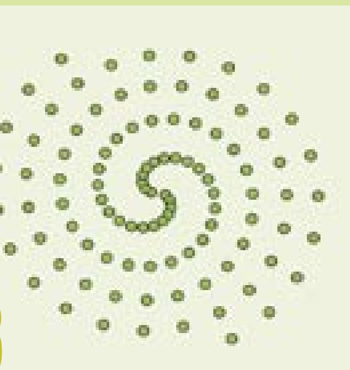
Hvis vi ser frøpakning som en evolutionsmæssig faktor, må vi forestille os, at de planter, der (mere eller mindre tilfældigt) er bedre til at pakke deres frø, i gennemsnit vil få flere afkom; og på denne måde forsvinder de mutationer, der pakker med uhensigtsmæssige vinkler, og de mutationer, der pakker tæt på den gyldne vinkel, vil få mange efterkommere. Da denne proces er foregået over millioner af år, ser vi i dag kun de pakningsperfekte solsikker. At nye skud, frø, blade på stængler etc. vokser frem efter en drejning med den gyldne vinkel, og at der derved kommer Fibonacci tal frem som antal af spiraler, man tilnærmelsesvis kan se, er et fænomen, der også kan observeres i så vidt forskellige vækster som blomkål og grankogler.



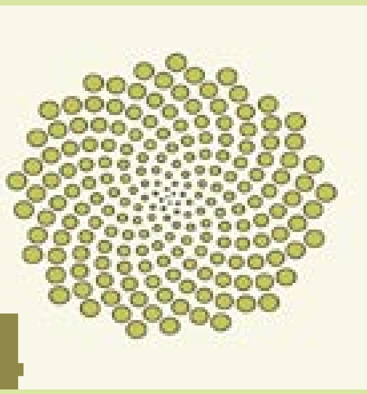
1



2

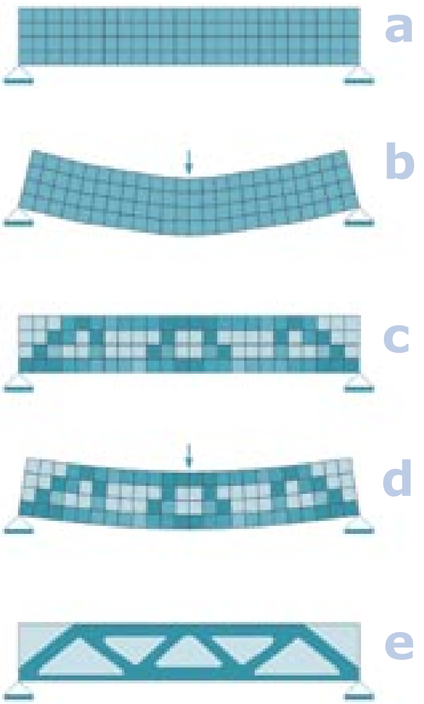


3



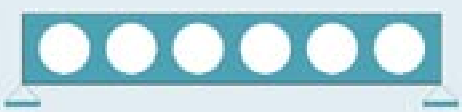
4

OPTIMERING
- computeren finder vej



Elementerne i topologioptimering

Materialetætheden i den enkelte pixel er i blåtoneskala.
(a) udgangspunktet: en bjælke med jævnt fordelt materiale.
(b) en analyse af bjælkens stivhed.
(c) et gradvist forbedret design.
(d) en analyse, der viser, at stivheden er forbedret.
(e) slutresultatet: det optimale design.



Konventionelt design af gulvbjælke i fly. Den topologioptimerede bjælke på foregående figur er 40 % stivere for samme vægt. Man kan ikke ved blot at ændre formen og placeringen af de seks runde huller i det konventionelle design opnå resultatet på figuren ovenfor, hvor der er 7 huller: de to bjælker er topologisk forskellige.

Det er velkendt, hvordan man ved hjælp af computerens tegneprogammer kan ændre en konstruktions udseende. Man kan imidlertid også bruge computeren til at lave forsøg med en konstruktions evne til at klare belastninger uden at bygge den først.

Modelafprøvning

Computeren regner på en matematisk model af konstruktion og påvirkninger, og kan for eksempel vise deformationer af en møllevinge i kraftig vind. Når man har opbygget en sådan computermodel, kan man lave tusindvis af forsøg på computeren, og måske kan man finde en møllevinge, der er bedre end alle andre; computeren bliver ikke træt af alt det regnearbejde, højst varm. Computeren giver altså ingeniøren og den industrielle designer muligheden for at afprøve langt flere ideer end det ville være muligt, hvis man skulle fremstille og afprøve de forskellige muligheder i virkeligheden.

Det er ofte en fordel at styre disse computerforøg således, at man er sikker på at nå til et bedre resultat end det, man har, når man starter. Vanskeligheden er, at man typisk vil ændre på mange ting på én gang, samtidigt med at en række krav skal tilfredsstilles.

Det svarer lidt til skiløb uden kort i vanskeligt terræn, hvor man gerne vil ned i bunden af en dal. Her kan man for eksempel forestille sig, at højden svarer til vægten af en møllevinge; at finde bunden af dalen svarer til, at man minimerer vægten. En god teknik til at komme ned ad bjerget er at observere bjergets form tæt på, hvor man står, og så køre ned dér, hvor det er stejlest. Efter et stykke vej ser bjerget anderledes ud, og man vælger en ny retning ned ad bjerget. Sådan fortsættes til man når ned, hvis man ikke ender i en lokal dal, en gryde i sneen.

For at ovenstående kan føres ud i livet, skal der sættes tal på alle de forskellige delelementer, som udgør det konstruktionsproblem, man vil løse. Det gælder blandt andet om at beslutte sig for en beskrivelse af konstruktionens geometri, som for eksempel kan være angivelse af længden, bredden og højden af en bjælke.

Optimering af bjælke

For at formulere et optimeringsproblem, som computeren kan arbejde med, skal man også bestemme sig for, hvordan man afgør, hvor god konstruktionen er. Skal en bjælke eksempelvis benyttes til at understøtte gulvet i et fly, er man interesseret i at finde den bjælke, som er lettest mulig, under forudsætning af, at bjælken kan holde til de belastninger, der måtte forekomme.

Vægten af bjælken er nem at regne ud, men det at finde ud af, hvor stærk bjælken er, kræver en mere omfattende beregning. Her bruger man computermodeller baseret på differentialligninger, der blandt andet afspejler hvilke belastninger og understøtninger, man tager hensyn til.

til den bedste konstruktion

Da sådanne beregninger typisk kan være ret tidskrævende, betyder det, at man ikke har en komplet oversigt over bjerget ved optimeringsprocessens start. I stedet ved man kun hvor højt oppe man er, og man kan, ved at bruge differentialregning (i generaliseret form), få en opfattelse af, hvordan tingene ser ud tæt på, hvor man er: tangenthældninger angiver hvor stejlt, der er i forskellige retninger - dette stemmer overens med det man har brug for i den skiløbsstrategi, der er omtalt ovenfor. At løbe ned ad bjerget, hvor det er stejlest, svarer til at computeren fortæller os hvilke designparametre, der er mest kritiske for konstruktionens effektivitet.

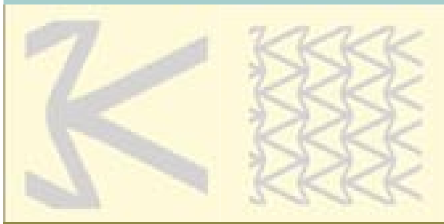
En sådan følsomhedsanalyse giver kun god information for mindre designændringer, og derfor må proceduren gentages. Dette foretages, indtil man ikke kan forbedre konstruktionen ved at ændre på de givne designparametre - man er nået ned i en dal.

Konstruktionens topologi

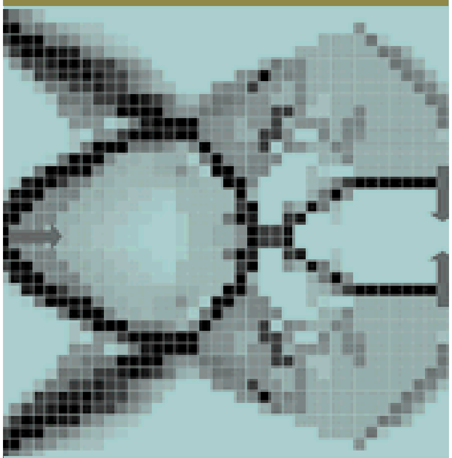
Et meget væsentligt aspekt af udformningen af en konstruktion er den grundlæggende sammensætning af de kurver og flader, der beskriver konstruktionens rumlige afgrænsning. Eksempelvis at afgøre om en bærebjælke til et møllehus bedst gøres lettere ved at lave 4 udskæringer, eller om den måske snarere skal have 6 udskæringer. Man kalder dette at finde konstruktionens topologi, dens landskab. En måde at beskrive en konstruktion på, der tillader ændring af topologien, er at betragte den som et gråtonebillede beskrevet ved en tæthed af materiale. I princippet er hvert enkelt punkt i rummet en potentiel del af konstruktionen, og optimeringen skal finde de punkter, som er med til at udgøre den optimale konstruktion. Der er tale om en fundamental anden repræsentation af geometri, end hvis man beskriver form ved randkurver. Men samtidig med, at man opnår en større frihed i beskrivelsen af et design, skal man også kunne håndtere langt større mængder data. Eksempelvis er en cirkel som kurve beskrevet ved et centrum og en radius, i alt 3 reelle tal. I et gråtonebillede kræves i princippet oplysninger om alle pixel-værdier, fx 1028x768 tal.

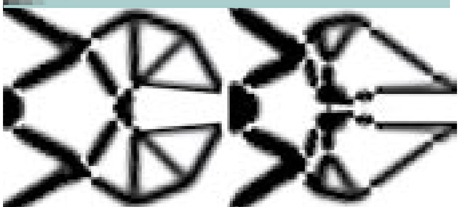
Topologioptimering

Den teknik, der er udviklet til at klare disse problemer, kaldes topologioptimering og ses nu i brug i en lang række danske og udenlandske industrivirksomheder, typisk i den indledende fase af konstruktionsarbejdet, hvor valget af en god udgangstopologi er afgørende for kvaliteten af det endelige produkt. Dette er en interessant udvikling, idet man typisk tidligere har benyttet computerværktøjer til analyse og optimering i de sene faser af en designproces, til forfining og afpudsning af et produkt.



I forbindelse med topologioptimering kan man også se på design af materialet i konstruktionen. Her har det vist sig muligt at designe materialer med helt overraskende egenskaber. Således kan man for eksempel lave materialer, der bliver tykkere når man trækker i dem, i modsætning til hvad der sker, når man trækker i en elastik. På figuren ses en enkelt enhedscelle i et sådant materiale, og en samling af enhedsceller. Der er lavet testbjælker, hvor enhedscellerne er så små, at de ikke ses med det blotte øje.





Topologioptimering kan bruges til at designe mikrorobotter. På figuren ses tre udvalgte trin i optimeringsprocessen af en gribeklo. Det endelige design minder om konstruktioner i naturen, fx hver af taskekrabbens gribekløer. Mikrorobotter er så små, at de fx kan anvendes til at fjerne blodpropper i menneskets blodårer.

BOBLER
- optimeret af fysikkens love

Bobler for sjov og bobler for alvor

Sæbebobler er legende lette og runde som kugler - det ved vi alle. Men hvorfor er de det, og hvorfor blæser man aldrig sæbebobler, der har form som overfladen af en røgring, men ofte dobbeltbobler, det vil sige to bobler, der har forenet sig til een boble med to kamre og 3 sideflader, der støder sammen langs en cirkel.

Multibobler er en anden betegnelse for skum. Skum findes alle vegne - ikke blot i opvaskebaljen. Tænk blot på flødeboller eller på cola-, øl- og champagneskum, barberskum, brandslukningsskum, emballeringsskum eller på noget helt nyt og spændende: metalskum, der i sig selv har mange andre tekniske anvendelser. Det er derfor vigtigt at kunne beskrive, forstå og forklare boblernes og multiboblernes strukturelle, fysiske og kemiske egenskaber.

Boblende geometri

En sæbeboble er rund og kugleformet af mindst to geometrisk meget interessante grunde.

For det første garanterer overfladespændingen i sæbehinden, at med det givne volumen inde i boblen, er arealet af overfladen så lille som muligt. Overfladespændingen trykker også luften lidt sammen inde i boblen, så der altid er en trykforskel Δp mellem ydre og indre.

Sæbebobler viser derfor løsningen på det såkaldte *isoperimetriske problem* i rummet: Find den mindste flade som omslutter et givet volumen. Med andre ord, hvis vi puster til en perfekt sæbeboble, så den deformeres lidt væk fra den kuglerunde form, så vil overfladen blive større, og sæbehinden risikerer derfor at briste.

For det andet kan den ovenfor omtalte trykforskel Δp mellem boblens indre og ydre udtrykkes helt lokalt - altså punktvis - ved hjælp af geometrien af et lille stykke af sæbehinden i en omegn af punktet. Enhver flade har en krumning i ethvert punkt. Den kan findes ved at måle bøjningerne (krumningerne) af hver af de to snitkurver, der fremkommer ved at snitte fladen med to planer som vist i figuren midt på næste side.

Planerne skal blot være vinkelrette på hinanden og desuden skal de begge stå vinkelret på selve fladen i det punkt x, der undersøges. Middelværdien af de to bøjninger af snitkurverne kaldes middelkrumningen af fladen i x, og benævnes med H(x). Der gælder nu for sæbehinder, at $\Delta p = H(x)$.

Det betyder, at trykforskellen kan beregnes og forstås geometrisk! Desuden er trykforskellen jo konstant, så middelkrumningen af fladen er derfor også konstant! Med andre ord: Fladens krumning sørger for lokalt at udspænde membranen i balance således, at trykforskellen kan opretholdes.

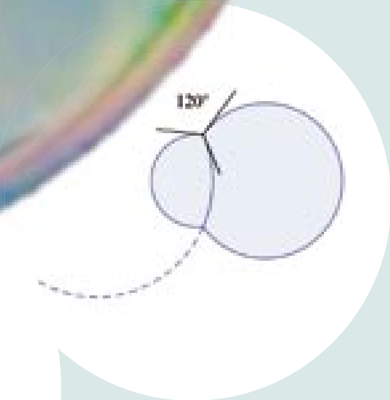
Sæbeboblerne illustrerer dermed også et helt andet geometrisk, matematisk resultat: Hvis en lukket flade i rummet har konstant middelkrumning, så er fladen en kugleflade. Her må vi selvfølgelig kræve, at fladen er lukket og ikke skærer igennem sig selv; ellers kunne man jo komme i tvivl om, hvad der er indre og ydre.

Dobbeltbobler

Dobbeltbobler er, som navnet siger, en konstellation af sæbehinder, der tilsammen omslutter og adskiller to givne volumener. Det isoperimetriske dobbeltbobleproblem er nu: Find den dobbeltboble, der omslutter to givne volumener, og som har mindst total overfladeareal.

Først i år 2000 blev det bevist, at løsningerne til det isoperimetriske dobbeltbobleproblem ser ud som i figuren til højre på næste side - de kaldes standard dobbelt-bobler. Det bemærkes, at trykket vil være størst i det mindste af de to kamre, og at kuglekalotten, der adskiller kamrene, derfor vil bue ind i det store kammer. Hvis de to givne volumener er lige store, er det en flad cirkelskive, der adskiller kamrene.

Mens en almindelig boble bare skal gøre sig rund for at minimere overfladen, skal dobbeltboblen desuden finde ud af at gøre vinklerne mellem de tre flader lige store i ethvert skæringspunkt. Men så længe en af vinklerne er mindre end de andre, vil skæringspunktet blive trukket ind i denne vinkel af de tilhørende overfladespændinger.



Ligevægtsbetingelsen er velkendt fra fysik: Hvis en partikel er påvirket af tre lige store kræfter, så er der balance præcis, når de tre kraftvektorer ligger i samme plan og har samme vinkel mellem sig.

Reglen om, at fladerne mødes i vinkler på 120°, blev indset og formuleret i 1873 af den belgiske fysiker J. A. F. Plateau (1801-1883) og kaldes hans første regel. Anden regel handler om situationer, hvor fire kanter mødes, som for eksempel i tripelbobler. Vinklen mellem to sådanne kanter vil være $\cos^{-1}(-1/3)$, altså cirka 109°.

I titlen til sin berømte afhandling om sæbeboblerne har han en lille antagelse: ... *aux seules Forces Moléculaires,* hvilket henviser til, at sæbeboblerne og skummet antages at være vægtløse. Det ville garanteret have fornøjet ham at være med i Den Internationale Rumstation, hvor denne antagelse jo er opfyldt, og hvor man netop i år har gentaget og udvidet mange af Plateu's eksperimenter og observationer med almindeligt vand i stedet for sæbevand.

Hvis en kurve har en ligning af formen $y = f(x)$ i et koordinatsystem, hvor x-aksen er parallel med kurvens tangent i punktet P, kan krumningen i P beregnes som $f''(x_0)$ hvor x_0 er førstekoordinaten til P. Den dobbelt afledede i x_0 udtrykker jo, hvor meget tangenthældningerne ændrer sig omkring x_0. Den numeriske værdi af krumningen er lig med $1/r$, hvor r er radius af den cirkel, der følger kurven bedst muligt omkring P.

Tværsnittet af en dobbeltboble består af tre cirkelbuer. Hvis radius for de tre cirkler kaldes henholdsvis r, s og R gælder:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{R}$$

Denne sammenhæng følger af, at middel-krumningen er lig med forskellen i tryk på hver side af sæbehinderne. De tre tangenter i hvert af skæringspunkterne danner tre vinkler på hver 120°.

Spilteori

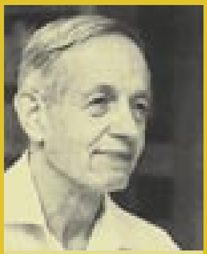
Optimeringsproblemer forekommer naturligvis i virksomhedsøkonomi: det kan dreje sig om praktiske problemer med at maksimere en enkelt virksomheds udbytte i en given situation; men man kan også se på strategier for en række konkurrerende virksomheder. I strategien kan indgå, hvor meget man sender på markedet og til hvilken pris, og den enkelte virksomheds udbytte afhænger af de andre virksomheders handlinger.

De matematiske modeller for sådanne situationer kaldes spil, og de kan bruges i mange andre end økonomiske sammenhænge.

Den amerikanske matematiker John Nash beviste i 1949, da han kun var 21 år, at det for en omfattende type af spil er muligt for hver spiller at vælge en strategi, der maksimerer spillerens forventede gevinst givet de andre spilleres valgte strategier.

Et sådant sæt af optimale løsninger kaldes en Nash-ligevægt. John Nash fandt som den første et eksistensbevis for sådan en ligevægt. Generelle konstruktive beregningsmetoder til at finde en Nash-ligevægt i konkrete givne situationer er først udviklet senere.

John Nash liv er skildret i bogen og filmen *A beautiful mind (Et smukt sind)*. Allerede da han var i slutningen af tyverne, udviklede han en paranoid skizofreni. Han levede som i en verden med indbildte personer og overnaturlige væsner. For eksempel mistænkte han kolleger for at stjæle ideer fra sine papirkurve. Flere gange måtte han tvangsindlægges i de følgende ti år, og selvom han langsomt fik det bedre, var han ude af stand til at arbejde seriøst med matematik i omkring 30 år. Det var derfor næsten mirakuløst, at han omkring 1990 kunne genoptage sit arbejde. John Nash modtog Nobelprisen i økonomi i 1994.



iPERSPEKTIV

Udgivet af Fysikforlaget med støtte fra Undervisningsministeriets tips/lottomidler og af Birch & Krogboe Fonden

Redaktion: Niels Elbrønd Hansen
Layout: Mette Qvistorff

Produktionsgruppe: Martin Bendsøe, Aksel Bertelsen (fagredaktør), Poul Hjorth og Steen Markvorsen

www.perspektiv.gymfag.dk

Tryk: Budolfi Tryk, Aalborg
Oplag: 10.000

ISSN: 1602-5059